„Wohltemperiert?“ – der Kampf mit den Semitoniae

Eine mathematisch inspirierte Analyse zur Stimmung der Lauten- und Tasteninstrumente

von Karlheinz Schüffler

> όλα είναι αριθμός
> *– alles ist Zahl*
> *(Pythagoras von Samos)*

Wir wissen eigentlich sehr wenig über die Art, wie die Antike die Dinge der Welt sah: Ganz gewiss hat aber selbst Pythagoras in der Musik nicht nur die „Zahl“ gesehen. Schließlich waren ja Zahlen nicht nur Zahlen sondern sie waren „die Zusammenfassung von Einheiten“. Auf der anderen Seite war Musik über Jahrtausende eine mathematische Wissenschaft – die Wissenschaft der ***„proportiones“***; das mittelalterliche Bild der ***„Septem artes liberales“*** gibt noch Zeugnis hiervon. Und so sind die Registerschildchen unserer Orgeln mit ihren rätselhaften Ziffern Beleg und Relikt antiker musikalischer Theorie. Wir werden uns in diesem Aufsatz mit der Theorie der Semitoniae – der „Halbtöne“ befassen. Um es vorweg zu nehmen: Es gibt zwar unbegrenzt viele ihrer Art wie dennoch keine allgemeine, brauchbare, sinnvoll definierende Festlegung derselben. Und in diesem scheinbaren inneren Widerspruch zeigt sich bereits eine Komplexität der Gegenstände, die dann entsteht, wenn Musiktheorie jenseits des trivialen Modells eines Tastatur-Quintenzirkels entwickelt werden muss. Gottlob hilft uns die Mathematik aus diesem Dilemma.

1 Übersicht und Grundbegriffe

> *„Die Orgel ist nicht meins“,*
> *(ein Zuhörer)*
> *„Das pythagoreische Komma – was ist das?“*
> *(eine Harfenistin)*

Wer sich mit einer Analyse der prägnantesten Stimmungen der frühen Neuzeit befasst, erkennt, dass diese sich sowohl an der Hauptachse der Temperierungstheorie

- pythagoreisch – rein diatonisch – mitteltönig – gleichstufig

orientieren als auch in reichem Maße durch Variationen, Mischformen wie auch überraschenden Neuinspirationen ein anscheinend unerschöpfliches Feld erschließen. Dabei entsteht eine überbordende Fülle an mikrotonalen Elementen der Skalenstrukturen, und es wird sehr schnell klar, dass eine bloße Genau-Berechnung der Intervallstufen – sei es im Cent- oder im physikalischen Frequenzmaß – ebenso unüberschaubar wie bar jeglichen nachhaltigen Verständnisses ist. Ein Ziel meines Beitrags ist, eben genau mithilfe der Mathematik (der Wissenschaft des Verstehens – nicht derjenigen des Rechnens) signifikante Begrifflichkeiten rund um die Theorie musikalischer Skalen und vor allem ihren Halbton-Strukturen zu erklären und – wo es möglich ist – ihre harmonischen Beziehungen untereinander zu beschreiben. Wir gehen dabei den kanonischen Weg der Hauptachse.

Abschnitt 2 beschreibt die Strukturen einer allgemeinen Quinten-Iteration: Wir begegnen

- Begriffsverankerungen der pythagoreischen Intervalle (Oktave, Quinte, Tonos, Limma, Apotome, „Komma“ sowie der Wolfsquinte),
- dem Struktursatz der Quinten-Iteration und deren Grundformeln und erkennen die Existenz genau 2er Semitoniae der Chromatik (damit ist die 12-Stufen-Skala gemeint), die Wolfsquinten-Gleichung, und wir entwickeln eine Vorstellung über Tonartencharakteristiken,
- den Hauptformen der Mitteltönigkeiten – und der Frage: Was ist das überhaupt?

Abschnitt 3 befasst sich mit dem klassischen Euler-Gitter der Primzahl-Intervalle (Oktave $2:1$, Quinte $3:2$ und Terz $5:4$). In diesem Gitter blühen alle semitonialen Pflanzen und ihre kleineren Verwandten, die Kommata ebenso wie beinahe alle klassischen Mikrotonstrukturen. Wir behandeln

- die Graphik des Eulergitters und seine geometrisch-musikalischen Bedeutungen,

- die signifikanten Semitonia der reinen Stimmung mit ihren harmonischen Gleichungen,
- die Kommata der klassischen Diatonik.

Abschnitt 4 klärt uns über Temperierungsmöglichkeiten **geschichteter Saiteninstrumente** (Lauten und Gitarren) auf – mit dem Ergebnis: Genau die gleichstufige Skala erfüllt das Prinzip simultaner Gültigkeit von „Reinheit der Oktaven + Shift-Invarianz + 12-Stufigkeit".

Bezeichnungen: Hinsichtlich der Notationen und einiger Verankerungen als auch wegen der Form unserer Darlegung müssen wir – quasi im Telegrammstil – doch das nötigste zusammenstellen – im Vertrauen darauf, dass sich vieles weitere an fachlichen Details intuitiv erschließt – und dass unsere stringente Form der gewünschten Klarheit dient.

Und genau deshalb bitte ich unsere Leser, der mathematischen Symbolik freundlich und mit Neugier zu begegnen, siehe das Begleit-Zitat zu Abschnitt 4. Thematisch geht es dann im Abschnitt 2 weiter.

- **Intervalle:** Ein (musikalisches) Intervall $\mathrm{I} = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ zweier (realer) Töne X, Y ist die Gesamtheit aller geordneten (realen) Tonpaare $(\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{Y}})$, für die der Frequenzen-Quotient $\widetilde{\mathrm{Y}}/\widetilde{\mathrm{X}}$ stets gleich Y/X ist.

- Dieser Frequenzen-Quotient Y/X heißt dann auch **Frequenzmaß** des Intervalls I; man schreibt hierfür $|\mathrm{I}| = \mathrm{Y}/\mathrm{X}$. So sind die Maße der reinen Intervalle Oktave, Quinte und Terz $2, 3/2$ und $5/4$.

- Gleichwohl verwendet man für solche ganzzahligen Intervalle auch das **antike Proportionenmaß** $\mathrm{n} : \mathrm{m}$ und ist dann sehr dicht bei unseren Orgelregister-Angaben. (Achtung: man begegnet auch vertauschten Rollen von n und m). Für die obigen Beispiele wären dies $2 : 1, 3 : 2$ und $5 : 4$.

- Mit dem Symbol „ln" für den Logarithmus naturalis bzw. „$\log_2$" für den Logarithmus zur Basis 2 ist

  $$\mathrm{ct}(\mathrm{I}) = 1200\ \log_2(|\mathrm{I}|) = 1200\ \log_2\left(\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}\right) = 1200\frac{\ln|\mathrm{I}|}{\ln 2} \qquad \text{Centmaß - Funktion}$$

  das **Centmaß eines Intervalls I.** Beispiele: Prim (0 ct); Oktave (1200 ct); 3 : 2 - Quinte (702,… ct); Wichtig: Centzahl positiv: Intervall aufsteigend – Centzahl negativ: Intervall absteigend.

- Auf naheliegende Weise können wir Intervalle I_1 und I_2 schichten, aneinanderfügen, addieren: „**adjungieren**"; so entsteht das neue Intervall $\mathrm{I}_1 \oplus \mathrm{I}_2$, die **„Adjunktion" von $\mathbf{I_1}$und $\mathbf{I_2}$** ; und die „**Subjunktion"** (Differenz oder Subtraktion) ist das Konstrukt $\mathrm{I}_1 \ominus \mathrm{I}_2$ mit der Bedeutung:

  $\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_1 \ominus \mathrm{I}_2 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{I}_3 \oplus \mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_1$ – oder anders gesagt „$\ominus[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$" bedeutet das Intervall $[\mathrm{Y}, \mathrm{X}]$.

  Für $\mathrm{n} = 1, 2, 3,..$ soll „nI" die n-fache Schichtung $(\mathrm{I} \oplus \mathrm{I} \oplus ... \oplus \mathrm{I})$ sein; und $(-\mathrm{n})\mathrm{I} = \ominus\ (\mathrm{nI})$.

***Keine Angst!** Für das Rechnen mit Intervallen mittels der Operationen $\oplus$ und $\ominus$ gelten alle simplen Grundregeln des mathematischen plus/minus-Kalküls des vertrauten Zahlenrechnens*. Die Prim ist das neutrale Element der Adjunktion: Wir haben eine **„Intervall-Arithmetik"** gewonnen. So wäre

$\mathrm{Quinte} \oplus \mathrm{Quarte} = \mathrm{Oktave} \quad \mathrm{oder} \quad \mathrm{Quinte} \ominus \mathrm{Oktave} = \mathrm{Prim} \ominus \mathrm{Quarte}$ (Abwärtsquarte).

Und für gleichstufige kleine und große Terzen (terz und Terz) wäre dann $4\mathrm{terz} \oplus (-3)\mathrm{Terz} = \mathrm{Prim}$.

- Das **Einmaleins der Musiktheorie:** Die folgende Anwendungs-Regel ist der Alltag im Rechnen mit Intervallen und Skalen jeglicher Art: Für alle Intervalle I_1 und I_2 gilt nämlich

$$\boxed{\begin{array}{l} |\mathrm{I}_1 \oplus \mathrm{I}_2| = |\mathrm{I}_1| * |\mathrm{I}_2| \text{ - aber } \mathrm{ct}(\mathrm{I}_1 \oplus \mathrm{I}_2) = \mathrm{ct}(\mathrm{I}_1) + \mathrm{ct}(\mathrm{I}_2) \\ |\mathrm{I}_1 \ominus \mathrm{I}_2| = |\mathrm{I}_1| / |\mathrm{I}_2| \text{ - aber } \mathrm{ct}(\mathrm{I}_1 \ominus \mathrm{I}_2) = \mathrm{ct}(\mathrm{I}_1) - \mathrm{ct}(\mathrm{I}_2) \end{array}}$$

Beim Skalenaufbau werden demnach die Centmaß-Zahlen ganz einfach **addiert** beziehungsweise **subtrahiert,** und diese Eigenschaft macht das Centmaß zum **linearen Metermaß der Intervalle**, mit dem alle Orgelbauer rechnen; es gestattet eine elementar – anschauliche Größenbetrachtung mikrotonaler und aller anderen Strukturen – dagegen ist das Frequenzmaß **multiplikativ!**

- Die **Reoktavierung"**: Jeder Ton kann durch eine eindeutige Anzahl von (Auf/Ab-) Oktavierungen in ein vorgegebenes Oktav-Intervall transportiert werden (die Oktave zur Tonika sei ausgenommen).
- **Der 4-Töne-Satz**: Sind X_1 und X_2 sowie Y_1 und Y_2 zwei Tonpaare, dann gilt die Äquivalenz:

  Wenn $|[X_1, X_2]| = |[Y_1, Y_2]|$ dann ist auch $|[X_1, Y_1]| = |[X_2, Y_2]|$ und umgekehrt.

Dieser Satz ist das Pendant zu den berühmten Strahlensätzen der Geometrie; sein Beweis ist trivial (denn $a/b = c/d \Leftrightarrow a/c = b/d$) – seine Bedeutung aber nicht!

Musikalische Skalen werden als **Adjunktions-Ketten** gewonnen – beispielsweise ergibt sich mit 12 (oder anderen) **Stufenintervallen** $I_1, I_2 \ldots, I_{12}$ mit positiven Cent-Werten die „**Oktavgleichung"**

$$I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots \oplus I_{12} = \text{Oktave}.$$

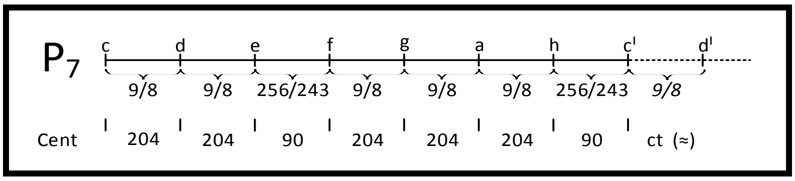
Jegliche Kenntnis über innere Strukturen – Semitonia, Kommata, Muster, mögliche Periodizitäten u.v.m. solcher Skalen gewinnen wir aus der Algebra dieser und analoger Gleichungen (und nicht aus numerischen Taschenrechner-Künsten). Und genau diesen Weg gehen wir im Folgenden – wenn auch nur in einer skizzierten Form. Interessierte Leser und Leserinnen erfahren in [4] mehr.

2 Quinten-Iterationen und ihre Wölfe

„…discordantzen, wellich die orgelmacher den wolff nennen" (Arnold Schlick)

Die bekannteste Methode zur Skalengewinnung ist die folgende schematische reoktavierte Schichtung von sechs reinen, pythagoreischen, (3 : 2-) Quinten zu einer heptatonischen Skala

$$\begin{array}{l} f \longleftarrow c \quad (= \text{Start} = \text{Tonika}) \\ \phantom{f \longleftarrow{}} c \longrightarrow g \longrightarrow d \longrightarrow a \longrightarrow e \longrightarrow h \end{array}$$



Es entsteht die heptatonische Skala P_7, an welcher wir diese Gesetzmäßigkeiten erkennen:

(1) Es gibt genau zwei Stufenintervall-Typen, einen „Ganzton (Tonos) T" und einen „Halbton L"

Tonos $\mathbf{T} = 2Q \ominus O$ (9 : 8, ≈204 ct) und **Limma** $\mathbf{L} = Q \ominus 3T$ (256 : 243, ≈ 90 ct).

(2) Oktave und Quinte lassen sich eindeutig durch ihre heptatonischen Stufenintervalle ausdrücken:

$5T \oplus 2L = O$ (Oktave) und $3T \oplus L = Q$ (Quinte).

(3) Der „Halbton" Limma L ist **nicht die Hälfte** des „Ganztons" T, und er hat einen semitonalen Partner im Tonos, die **„Apotome" A** (2187 : 2048, ≈ 114 ct), also $L \oplus A = T$.

(4) Ersetzen wir T durch $L \oplus A$, so folgen aus der Oktav- und Quint-Bilanz (2) die beiden Formelpaare, wobei wir das zweite Formelpaar aus dem ersten durch einfaches „Umstellen" gewonnen haben:

$7L \oplus 5A = O$ (Oktave) und $4L \oplus 3A = Q$ (Quinte)

$3O \ominus 5Q = L$ (Limma) und $7Q \ominus 4O = A$ (Apotome)

Als Konsequenz ergibt sich, dass jedes Intervall, welches als eine ganzzahlige Adjunktion von Oktaven und Quinten gebildet ist, sich ebenso eindeutig durch die Semitonia L und A bilanzieren lässt, heißt:

- ***Alle pythagoreischen Intervalle sind Summen/Differenzen der Halbtöne Limma und Apotome.***

(5) Die Tonos - Limma - Abfolge der Skala P_7 ist sicher die Geburtsstunde unserer bekannten schulischen Formel $1 - 1 - ½ - 1 - 1 - 1 - ½$ für den Aufbau der Dur-Tonleiter.

Um dem Leser einmal den Vorteil dieser algebraischen Form der Gleichungen zu demonstrieren, berechnen wir die Natur des Quinten-Kommas – wohlbekannt als „**pythagoreisches Komma**“. Wir erkennen darin ein fundamentales Prinzip: **Die Halbton-Differenz geht einher mit dem Schließungsdefizit der Iterationsfolge des Erzeuger-Intervalls (hier: die 3 : 2-Quinte)!**

Satz vom Quinten-Komma: Die Differenz der Semitonia Apotome und Limma ist simultan das Schließungsdefizit ε von 12 Quinten gegenüber 7 Oktaven („Quinten-Komma“), in Formeln:

$$\varepsilon = 12\mathrm{Q} \ominus 7\mathrm{O} = \mathrm{A} \ominus \mathrm{L}.$$

Folgerung 1: Subtrahiert man dieses ε von einer der Quinten, so ergibt sich die für die Quinten-Iteration markante Wolfsquinten-Formel: Ist $\mathrm{W} = (\mathrm{Q} \ominus \varepsilon)$ die sogenannte **Wolfsquinte,** so gilt

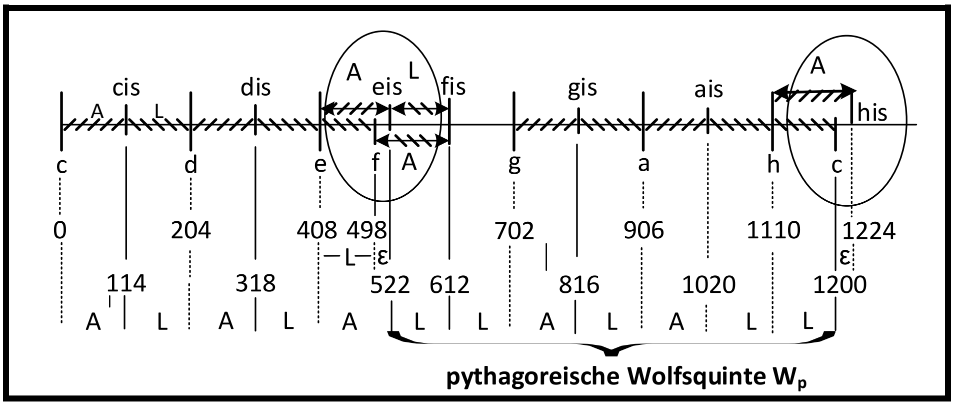
$$\mathrm{O} = 11\mathrm{Q} \oplus (\mathrm{Q} \ominus \varepsilon) = 11\mathrm{Q} \oplus \mathrm{W}.$$ (**Quintenkreis- oder Wolfsquinten-Formel)**

Folgerung 2: Für das Centmaß dieses Kommas gilt: $\mathrm{ct}(\varepsilon) = \mathrm{ct}(\mathrm{A}) - \mathrm{ct}(\mathrm{L}) \cong 24{,}46 \ldots \mathrm{ct}.$

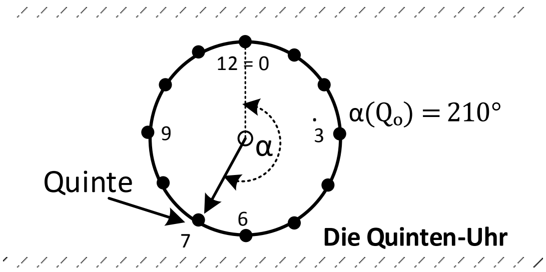
Warum? Wir verwenden die beiden Formeln aus (4) und rechnen wirklich ganz einfach so:

$$12\mathrm{Q} \ominus 7\mathrm{O} = 12(4\mathrm{L} \oplus 3\mathrm{A}) \ominus 7(7\mathrm{L} \oplus 5\mathrm{A}) = (48 - 49)\mathrm{L} \oplus (36 - 35)\mathrm{A} = \ominus\mathrm{L} \oplus \mathrm{A} = \mathrm{A} \ominus \mathrm{L}.$$

Wenn wir nun den Prozess der Quinten-Iteration erweitern – mit dem Ziel, eine **chromatische Skala** P_{12} zu erhalten, so führt nach dem P_7- Prozess die nächste Quinte von h zu fis und so fort; wir erhalten dann schließlich und dank des 4-Töne-Satzes die Skala P_{12}, in welcher wir die Abfolge der Semitonia ebenso erkennen wie auch das L - A - Semiton-Muster der **Wolfsquinte.** *Zu Erklärung sei noch gesagt: Würde man den Ton f als ein „eis“ mittels einer Aufwärtsquinte auf ais = b gewinnen, so wäre die Schließungsquinte eis-c′ genau die Wolfsquinte.*



Das Uhrenmodell: *Nach diesem Sprung ins kalte Wasser der mathematischen Beschreibung dieses sicher vertrauten musikalischen Prozesses möchte ich – quasi zur Versöhnung – ein äußerst anschauliches Modell hinzufügen, welches vielleicht dem nicht so detailvertrauten Leser eine zu den Formeln durchaus ebenbürtige Vorstellung geben kann.*



Die Quinten-Uhr

Stellen wir uns eine Stundenuhr vor, für die ein Stundenschritt genau einem gewöhnlichen (gleichstufigen) Halbtonschritt unserer Klaviatur entspräche; jeder Stundenschritt ist 100 ct wert, der geschlossene Umlauf – eine Oktave – also 1200 ct. Die “Reoktavierung“ ist nun ganz einfach: Geht der Zeiger bei 12 beginnend wieder weiter, so zählen wir wieder von vorne: die 12 wird zur 0, die 13 zur 1 und sofort. Wo steht der Zeiger bei der Quinte? Nun, das ist offenbar die Stundenziffer 7, es sind 7 Halbtonschritte. Verfolgen wir jetzt ausschließlich Schritte in kompletten Quinten, so entstehen die Stundenzahlen $0 - 7 - 2\ (=14) - 9 - 4\ (= 16)$ usw., und nach 12 Schritten sind wir wieder bei 0 – und wenn Sie mitgezählt haben, sehen Sie, dass der Stundenzeiger dabei genau 7 mal den Uhrenkreis durchlaufen hat; wir haben die Gleichung $12\ \mathrm{Q} = 7\mathrm{O}$ wahrlich gesehen. So jedenfalls wäre es, wenn die Quinte – nennen wir sie Q_0 - **genau auf der 7** stünde. Stellen Sie sich nun vor, Sie hätten eine zweite Uhr, eine mechanische, und wenn die genaue Uhr auf 7 steht, ist diese nun ein gutes Minütchen weiter, nicht viel und ohne Minuten- oder Sekundenzeiger eigentlich kaum zu bemerken. Das Drama mit dieser Quinte – nennen wir sie Q_p - ist aber nach 12 Quinten-Schritten ein anderes: Gut 12 Minuten mindestens – ein knappes Viertelstündchen – eilt Ihre Uhr vor: Genug, dass man es sieht – und noch viel merklicher hört. Sehen Sie: Genau diese 12 Minuten sind das Quinten-Komma, das pythagoreische; die Gleichung $12\ \mathrm{Q} = 7\mathrm{O} \oplus \varepsilon$ ist sichtbar geworden. Wir haben es nämlich mit der „guten“ Minute recht gut getroffen, denn knapp 24 ct sind ja ebenso ein knappes Viertel von 100 – dem gewöhnlichen Halbton. (Wer es vertiefen möchte: Bei Voreilung von 1 min+12 sec nach 7 Stunden sind 24 ct nach 12 Schritten erreicht).

Und wenn nun im Folgenden oder anderswo von Iterationen mit gewissen Quinten und derlei die Rede ist, so stellen Sie sich einfach diese Uhr vor, bei welcher sich die Quinte als eine kleine Störungen der Q_0- Quinte in einem kleinen Streubereich um die Stundenziffer 7 herum entpuppt. Und alle Intervall-Konstruktionen können Sie bequem am vertrauten Ziffernblatt ablesen.

Zurück zur **Theorie:** Wenn wir die Temperierungen der beginnenden Neuzeit studieren, sehen wir, dass das Prinzip des Skalen-Aufbaus mittels Quinten-Schichtungen nach der Ära der Jahrtausende langen Alleinherrschaft der pythagoreischen Doktrin noch weitere prominente Vertreter hat, angefangen von diversen **Mitteltönigkeiten** der Renaissance hin zu Silbermann und vielen seiner Zunft des Barock-Frühklassik-Zeitalters. Und die Frage stellt sich: Sind diese pythagoreischen Strukturen kennzeichnend für die pythagoreische Quinten-Iteration? Mitnichten! Dazu dient das nächste „Theorem“. Geleitet durch die voranstehende prominente Standardsituation und geleitet durch die darin erkennbare Struktur des lydischen Tetrachords legen wir fest:

Sei Q irgendeine beliebige Quinte – das sei im Moment ein beliebiges Intervall mit $\mathrm{ct(Q)} > 600$. Dann definieren (!) wir mittels diesem Q und der Oktave O zwei **abstrakte** Elementar-Intervalle T und L.

(6) $\mathrm{T} = 2\mathrm{Q} \ominus \mathrm{O}$ **(Tonos)** und dann $\mathrm{L} = \mathrm{Quarte} \ominus 2\mathrm{T} = (\mathrm{O} \ominus \mathrm{Q}) \ominus 2\mathrm{T} = 3\mathrm{O} \ominus 5\mathrm{Q}$ **(Limma)**

und erhalten hieraus zunächst folgendes Kriterium (die „**Semiton – Bedingung“**):

(7) Genau dann wenn $\frac{4}{7} * 1200\ \mathrm{ct}\ (\cong 685{,}7\ \mathrm{ct}) < \mathrm{ct(Q)} < 720$ ct ist, gilt $0 < \mathrm{ct(L)} < \mathrm{ct(T)}$.

Diese besagt, dass genau für solche Quinten das abstrakte Limma L einen semitonalen Partner A im Tonos T hat, will sagen, dass $\mathrm{L} \oplus \mathrm{A} = \mathrm{T}$ eine echte Zerlegung des Ganztons in zwei kleinere Intervalle darstellt. Und mit (6) folgt dann sofort die Formel für diese **Apotome,** nämlich $\mathrm{A} = 7\mathrm{Q} \ominus 4\mathrm{O}$.

Theorem vom Quinten-Komma: Für jede Iterationsquinte Q, welche aus dem Cent-Korridor nach Aussage (7) gewählt ist, gelten die Identitäten

$\varepsilon = 12\ \mathrm{Q} \ominus 7\mathrm{O} = 6\ \mathrm{T} \ominus \mathrm{O} = \mathrm{A} \ominus \mathrm{L}$ **(Quinten-Komma-Formel)**

und ε heißt dann **Quinten-Komma (der Quinte Q)**. Mittels einer – um dieses Komma veränderten Quinte (der Wolfsquinte zur Quinte Q) entsteht also der geschlossene 12-stufige Quinten-Kreis

$\mathrm{O} = 11\ \mathrm{Q} \oplus \mathrm{W}$ mit der **Wolfsquinte** $W = (\mathrm{Q} \ominus \varepsilon)$. **(Wolfsquinten-Formel)**

- Jede durch reoktavierte Quinten erzeugte 12-stufige Skala hat **die gleiche $(\mathrm{A}$-$\mathrm{L})$ Semiton-Abfolge** wie die des pythagoreischen Falls oder Schiftungen derselben, wobei die Lage der Wolfsquinte W an allen 12 Stufen beginnen kann, was genau der Wahl einer anderen Tonika entspricht.
- Schreiben wir $\mathrm{ct}(\mathrm{Q}) = (700{+}\mathrm{x})$ ct, so ist $\mathrm{ct}(\varepsilon) = 12\,\mathrm{x}$. Dadurch ist auch klar, dass nur für die Quinte Q der Gleichstufigkeit $(\mathrm{x} = 0)$ sowohl $\mathrm{ct}(\varepsilon) = 0$ ist als folglich auch $\mathrm{A} = \mathrm{L}$ gilt.

Die allgemein vorhandene Unterschiedlichkeit der Semitonia A und L zusammen mit ihrem durch die Quintenkreis-Schließung bedingten aperiodischen Muster erklärt dann auch die **Tonarten-Charakteristiken.** Beginnen wir nämlich – in derselben Skala – eine Dur-Leiter auf einem anderen Ton, so ist das Muster der Semiton-Abfolge anders (und in früheren Zeiten hat man diese als Spannung empfundenen Nuancen offenbar geschätzt).

Alle diese Aussagen und noch viele weitere zeigen die Bedeutung der Semitonia A und L – insbesondere derjenigen ihrer Differenz. Den Beweis der Quinten-Komma-Formel haben wir – völlig ohne schwierige Zahlenkolonnen – in einer einzigen Zeile schon getätigt; alles andere folgt hieraus.

Die Anwendungen: Wir wollen nun exemplarisch auf zwei signifikante Beispiele eingehen:

(A) **Die Mitteltönigkeit(en):** Was sind mitteltönige Temperaturen und ihre Semitonia?

Wir kennen viele Formen, die – teils zu Recht, teils zu Unrecht – als mitteltönige Temperatur bezeichnet werden; mancherorts wird bereits eine nicht modern gleichstufig eingerichtete Orgel als „mitteltöniges Instrument" benannt. Im Kern und ursprünglich handelt es sich um zwei Forderungs-Maxime, nämlich eine Ausgleichung des Kommas, eine hälftige Teilung der reinen Terz 5 : 4 (welche die Summe der beiden reinen Ganztöne 9 : 8 und 10 : 9 ist) zu gewinnen, möglichst viele große „reine" Terzen (Terz; 5 : 4; Dur-Terz-Prinzip) oder (alternativ und ersteres ausschließend) möglichst viele kleine „reine" Terzen (terz; 6 : 5; Moll-Terz-Prinzip) zu gewinnen. Wir werden sehen, dass es hierzu noch umfassendere, modernere Interpretationen gibt.

Der Wunsch, die immer ungeeigneter erscheinende pythagoreische Terz (Ditonos, 81 : 64, 408 ct) durch die reine Terz (Terz, 5 : 4 = 80 : 64, 386 ct) zu ersetzen, zeigt sich in der Forderung:

> Suche eine (Iterations-) Quinte (die wir mit Q_m^+ bezeichnen), so dass die Schichtung von 4 dieser Quinten statt zum Ditonos zur reinen 5 : 4 - Terz (plus 2 Oktaven) führt, in Formeln

$$\mathrm{Q}_\mathrm{m}^+ \oplus \mathrm{Q}_\mathrm{m}^+ \oplus \mathrm{Q}_\mathrm{m}^+ \oplus \mathrm{Q}_\mathrm{m}^+ = 4\mathrm{Q}_\mathrm{m}^+ = \mathrm{Terz} \oplus 2\mathrm{O}. \qquad \textbf{(Dur-Terz-Prinzip)}$$

Daraus lesen wir sofort die Frequenzmaßgleichung $|4\mathrm{Q}_\mathrm{m}^+| = |\mathrm{Q}_\mathrm{m}^+|^4 = 5$ als auch die (gerundete) Centmaß-Gleichung $\mathrm{ct}(\mathrm{Q}_\mathrm{m}^+) = 2400 + 386{,}3$ ab, aus welcher $\mathrm{ct}(\mathrm{Q}_\mathrm{m}^+) = 696{,}57\ldots$ ct folgt. Schreiben wir diesen Wert in der Form $700{+}\mathrm{x}$, so ist $\mathrm{x} \cong -3{,}42$, und das Quinten-Komma der nun gefundenen **„mitteltönigen Dur-Terz-Quinte" $\mathbf{Q}_\mathbf{m}^+$** beträgt $-41{,}05\ldots$ct, ein großer negativer defizitärer Wert. In der Sprache unseres Uhren-Modells würde das heißen, dass diese Uhr nach dreieinhalb Tagen eine knappe halbe Stunde nachgeht.

*Aber erinnert uns die Centzahl 41 ct nicht an die berühmte **kleine Diësis**, dem Unterschied von Oktave und 3 großen reinen $5:4$ - Terzen, und welche man das **Terzen-Komma zur Primzahl 5** nennen sollte? Sind die Werte nur bei Rundung gleich? Nein, beide sind entgegengesetzt identisch, denn*

$$\varepsilon_\mathrm{m}^+ = 12\mathrm{Q}_\mathrm{m}^+ \ominus 7\mathrm{O} = 3(4\mathrm{Q}_\mathrm{m}^+ \ominus 2\mathrm{O}) \ominus \mathrm{O} = 3\mathrm{Terz} \ominus \mathrm{O} = \ominus\ \text{kleine Diësis}\ (\approx -41\ \mathrm{ct}).$$

Bleibt noch zu erwähnen: Die Daten des mitteltönigen Ganztons T_m^+ und seiner beiden zueinander komplementären Semitonia, dem mitteltönigen Limma L_m^+ und der mitteltönigen Apotome A_m^+, welche wir gemäß unseren Formeln (6) und (7) gewinnen, lauten

$$\mathrm{ct}(\mathrm{T}_{\mathrm{m}}^{+}) = 193\ \mathrm{ct},\ \mathrm{ct}(\mathrm{L}_{\mathrm{m}}^{+}) = 117\ \mathrm{ct}\ \text{ und } \mathrm{ct}(\mathrm{A}_{\mathrm{m}}^{+}) = 76\ \mathrm{ct}.$$

Wie sieht die Situation im Falle des **Moll-Terz-Prinzips** aus? Hier wünschen wir, dass 3 geschichtete Quarten zu einer kleinen reinen Terz (terz, 6 : 5, 315,64…ct) plus einer Oktave führen – also zur Oktave der Moll-Terz. Notieren wir diese gesuchten Quarten in der Form $(\mathrm{O} \ominus \mathrm{Q}_{\mathrm{m}}^{-})$, so heißt das

$$3(\mathrm{O} \ominus \mathrm{Q}_{\mathrm{m}}^{-}) = \mathrm{O} \oplus \mathrm{terz} \quad \Leftrightarrow \quad 3\mathrm{Q}_{\mathrm{m}}^{-} = 2\mathrm{O} \ominus \mathrm{terz}. \quad \textbf{(Moll-Terz-Prinzip)}$$

Und die letzte Form führt uns direkt zu den Frequenz- und Cent-Daten dieser **Moll-Terz-Quinte $\mathbf{Q_m^-}$**. Es ist $|\mathrm{Q}_{\mathrm{m}}^{-}|^3 = 4 * \frac{5}{6} = 10/3$ beziehungsweise $\mathrm{ct}(\mathrm{Q}_{\mathrm{m}}^{-}) = \frac{1}{3}(2400 - 315{,}6) = 694{,}78$ ct. Das riesige, sehr große Quinten-Komma $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{-}$ berechnen wir mit der simplen Methode wie zuvor und es ist

$$\mathrm{ct}(\varepsilon_{\mathrm{m}}^{-}) = 12\ (694{,}78 - 700) \approx -62{,}64..\mathrm{ct}.$$

Jetzt wundern wir uns aber nicht, dass dieses Quinten-Komma entgegengesetzt identisch mit der **großen Diësis** ist, welche als Differenz von 4 reinen kleinen Terzen zur Oktave bekannt ist! Die Centwerte der signifikanten Intervalle der iterierten Skalen sind nun

$$\mathrm{ct}(\mathrm{T}_{\mathrm{m}}^{-}) = 189{,}6\ \mathrm{ct},\ \mathrm{ct}(\mathrm{L}_{\mathrm{m}}^{-}) = 126{,}1\ \mathrm{ct}\ \text{ und } \mathrm{ct}(\mathrm{A}_{\mathrm{m}}^{-}) = 63{,}5\ \mathrm{ct}.$$

Gibt es nun übergreifende Zusammenhänge? – Ja, die gibt es: Tatsächlich sind nun beide Formen in der Betrachtung vereinheitlicht: Subtrahieren wir die beiden Gleichungen

$$4\mathrm{Q}_{\mathrm{p}} = \mathrm{Terz}_{\mathrm{pyth}} \oplus 2\mathrm{O}\ \text{ und }\ 4\mathrm{Q}_{\mathrm{m}}^{+} = \mathrm{Terz}_{\mathrm{rein}} \oplus 2\mathrm{O}$$

($2\mathrm{T}_{\mathrm{p}} = \mathrm{T}_{\mathrm{p}} \oplus \mathrm{T}_{\mathrm{p}} = \mathrm{Terz}_{\mathrm{pyth}}$ ist ja der pythagoreische **Ditonos**), so ergibt sich sofort die Gleichung

$$4\mathrm{Q}_{\mathrm{p}} \ominus 4\mathrm{Q}_{\mathrm{m}}^{+} = \mathrm{Terz}_{\mathrm{p}} \ominus \mathrm{Terz}_{\mathrm{r}} = \mu_{\mathrm{synt}}$$

mit dem berühmten **syntonischen Komma $\boldsymbol{\mu_{synt}}$** (81 : 80; ≈ 21,5 ct) als die Differenz pythagoreischer zu reiner Terz. Genauso finden wir für die Bestimmungsgleichung von $\mathrm{Q}_{\mathrm{m}}^{-}$ die analoge Form

$$3\mathrm{Q}_{\mathrm{p}} \ominus 3\mathrm{Q}_{\mathrm{m}}^{+} = \mu_{\mathrm{synt}},$$

sodass nun eine **1/n-Komma-Stimmung** formulierbar ist: Bestimme diejenige Quinte Q , für welche

$$\boxed{n\mathrm{Q} = n\mathrm{Q}_{\mathrm{p}} \ominus \mu_{\mathrm{synt}}\ \text{ und somit } (\mathrm{Q}_{\mathrm{p}} \ominus \mathrm{Q}) = \tfrac{1}{n}\mu_{\mathrm{synt}}} \qquad \textbf{1/n-Komma-Mitteltönigkeit}$$

ist, dann liefert die Quinten-Iteration eine entsprechende mitteltönige Skala. Das syntonische Komma wird also geteilt, nicht das pythagoreische! Tatsächlich findet man vereinzelt solche eher entlegenen Stimmungen vor.

> *So gibt es in der St. Andreaskerk im niederländischen Hattem eine Orgel mit 1/5-Komma Stimmung. Und bei den alten Meistern gibt es manches auszugraben: Der große Zarlino (1517-1590) hat bereits eine Variante der **1/7-Komma Temperierung** angegeben.*

(B) Unter den zahlreichen Erfindungen an Iterations-Quinten erwähnen wir das Grundverfahren von **Gottfried Silbermann** (1583-1753). Er definiert seine Quinte (Q_{S}) durch die Forderung

$$12\ \mathrm{Q}_{\mathrm{S}}\ (= 7\mathrm{O} \oplus \varepsilon_{\mathrm{S}}) = 7\mathrm{O} \ominus \varepsilon_{\mathrm{p}} \quad \text{was bedeutet, dass } \mathrm{Q}_{\mathrm{S}} = \mathrm{Q}_{\mathrm{p}} \ominus \tfrac{1}{6}\varepsilon_{\mathrm{p}}$$

Daher ist das **Silbermann´sche Quinten-Komma** $\varepsilon_{\mathrm{S}} = \ominus\,\varepsilon_{\mathrm{p}}$, was nichts anderes bedeutet, als dass es gleichgroß wie das pythagoreische Komma ist - aber abwärts führend wirkt. Ein interessanter Aspekt ergibt sich, wenn wir die Intervalle der gleichstufigen Temperierung (indiziert durch das kleine ∘) vergleichend ins Spiel bringen. Mit $\mathrm{ct}(\mathrm{Q}_0) = 700$ ct ergibt sich sofort

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{p}} = \mathrm{Q}_0 \oplus \tfrac{1}{12}\varepsilon_{\mathrm{p}}\ \text{ und demgegenüber } \mathrm{Q}_{\mathrm{S}} = \mathrm{Q}_0 \ominus \tfrac{1}{12}\varepsilon_{\mathrm{p}}.$$

Es zeigt sich, dass alle durch die Silbermann-Quinte $\mathrm{Q_S}$ erzeugten Intervalle durch „Spiegelung“ der ihnen jeweils entsprechenden pythagoreischen an der neutralen Linie der Gleichstufigkeits-Intervalle gespiegelt sind; die Silbermann-Stimmung ist die an der Gleichstufigkeitslinie „gespiegelte“ pythagoreische Stimmung. Zum Beleg, den man auch abstrakt wie zuvor führen kann, wollen wir die drei Hauptwerte rechnen: Die Centwerte von $\mathrm{T_S}, \mathrm{L_S}$ und $\mathrm{A_S}$ sind 196, 110 und 86 (gegenüber den pythagoreischen Daten 204, 90 und 114) – somit 200$\pm$4 ct, 100 ± 10 ct und 100 ± 14 ct.

Am Ende dieser Betrachtung will ich noch auf eine wirklich spannende Frage eingehen, die sich ergibt, wenn eine **unbegrenzt fortgesetzte reoktavierte Quinten-Iteration** erfolgt.

> *Welche Eigenschaften hat dann die durch Quinten erzeugte Tonmenge, die Algebra aller Intervalle $nO \oplus mQ$ (mit ganzzahligen, positiven oder negativen Zahlen n und m)?*

Fall A: Ist das Centmaß (!) der Quinte Q rational (zum Beispiel 701,3 ct), so ist die reoktavierte Iterationenfolge **periodisch,** und es gibt pro Oktave nur endlich viele Stufenintervalle, sprich Töne. *So wären 7013 Oktaven genau so viel wie 12000 Quinten – die Skala c - c' hätte 7013 Stufen (o ha !!).*

Fall B: Das Centmaß ist irrational (wie es zum Beispiel für die 3 : 2- Quinte wäre); dann sind alle reoktavierten Iterationen untereinander verschieden, jeder Ton ist anders; die Skala c - c' hat unendlich viele Töne der Tonalgebra, und diese sind gleichmäßig und „dicht“ verteilt – speziell gilt:

> **Theorem von Poincaré (1854 – 1912):** In **jeder** Nähe eines **beliebigen** Tons befindet sich auch einer aus der Menge aller pythagoreischen Intervalle, also aus der Iterationsalgebra
>
> $$\mathfrak{M}_{pyth} = \{(\mathrm{kO}) \oplus (\mathrm{mQ}) \mid \text{mit ganzen Zahlen } \mathrm{k,m} \in \mathbb{Z}\}$$
>
> aller ausschließlich aus **reinen Quinten und Oktaven** gebildeten Intervalle.

- **Und**: Alle diese Töne lassen sich durch die beiden pythagoreischen **Semitonia** Limma (L) und Apotome (A) ausdrücken und berechnen – wir nutzen dazu nur die Umkehrgleichungen (4).

3 Euler und die Semitonia

> *„Nym ffaut darnach iiij. quinten vber einander, so gibt die letzst das ist alamire ein tertz perfekt oder doppel decima vnd doppel sext zü hoch gegen den ffaut vnd csolfaut et cetera“ (Arnold Schlick)*

Das Streben, nur reine und durch „Primzahlen“ zu berechnende Intervalle zu verwenden – was sowohl in der physikalischen Natur des Obertonspektrums als auch in der antiken Sichtweise ***konsonanter*** Musik seine Gründe hat, führt uns zunächst zu einer Ton- beziehungsweise Intervall-Algebra, welche nur durch **Oktaven** (Primzahl 2), **reinen Quinten** (Primzahl 3) und **reinen Großterzen** (Primzahl 5) in Form ganzzahliger Adjunktionen gebildet wird. Ausschlaggebend zu dieser Entwicklung war u.a. der bekannte Streit um die Vorherrschaft des pythagoreischen Ditonos (die $\mathrm{Terz}_{pyth}, 81 : 64, \approx 408$ ct) zu ungunsten der „klangschöneren“ Terz_{rein} ($80 : 64 \equiv 5 : 4, \approx 386$ ct). Diese neue Tongesamtheit ist – in ordnender mathematischen Sprache – das Sammelsurium

$$\mathfrak{M}_{rein} = \{(\mathrm{kO}) \oplus (\mathrm{mQ}) \oplus (\mathrm{nTerz}) \mid \text{mit ganzen Zahlen } \mathrm{k,m,n} \in \mathbb{Z}\},$$

und es enthält (wenn wir $\mathrm{n} = 0$ setzen) alle pythagoreischen Iterationen $\mathfrak{M}_{pyth}$ als „Unteralgebra“. Dabei ist es wichtig zu erwähnen, – und den Primzahlen 2, 3 und 5 sei es gedankt –, dass

1. **verschiedene** Iterationsparameter k, m und n auch zu **verschiedenen** Intervallen führen,

2. die Frequenzmaßdaten dieser 3-parametrischen Intervallmenge sich gleichmäßig und „dicht“ über den gesamten positiven reellen Zahlenraum erstrecken: In jeder Nähe jeder positiven Zahl gibt es ein Frequenzmaß eines aus diesen Terz- Quint- Oktav-Iterationen bestehenden Intervalls.

Wir steuern nun die Frage an:

➢ ***„Welche Semitonia sind in Skalen, die sich dieses Tonvorrats $\mathfrak{M}_{rein}$ bedienen, zu finden?“***

Folgen wir dem üblichen historisch-organischen Weg, so konstruieren wir im ersten Schritt eine **reine heptatonische Skala $\mathbf{R_7}$,** und das übliche Konstruktionsprinzip hierbei lautet:

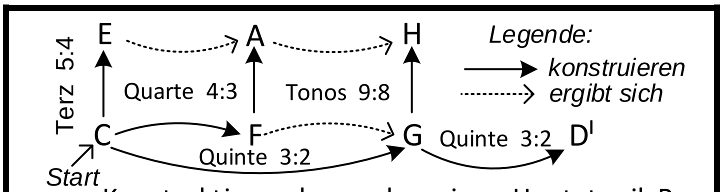
➢ ***Die Dur-Dreiklänge auf Tonika, Subdominante und Dominante sollen rein sein,*** – kurz: der Proportionenkette 4 : 5 : 6 genügen (*Notation umgekehrt),* was durch die Klanggleichung

$$\text{Terz}_{rein}(5:4) \oplus \text{terz}_{rein}(6:5) = \text{Quinte}_{rein}\ (3:2)$$

ausgedrückt wird. Und so entsteht der „Keller“ des Gebäudes des **reinen Tonsystems**.

Anweisung: „Auf 3 Quinten (F - C - G) errichte jeweils eine reine Terz sowie eine zusätzliche Quinte (D)“.

Dann erhalten wir die wohlbekannte reine Skala R_7. Sie hat die bemerkenswerten Eigenschaften:



Konstruktionsschema der reinen Heptatonik R_7

(8) Es gibt genau 3 verschiedene leitereigene Ton- beziehungsweise Intervalltypen:

- **großer Ganzton** $\mathbf{T}$ (9 : 8 ; ~204 ct) und **kleiner (reiner) Ganzton t** (10 : 9; ~182 ct);
- **reiner, diatonischer Halbton S** (16 : 15; ~112 ct);

dieser Halbton S ist um ~21,5 ct (dem syntonischen Komma μ_{synt}) größer als das pythagoreische Limma L; in der Tat gilt die Bilanz $\mathbf{S = L} \oplus \mu_{synt}$ abstrakt - und nicht nur „genähert“.

(9) Die nach diesem Schema gebaute Skala besitzt die lydische (aber unsymmetrische) Stufenfolge

$$\mathbf{T - t - S - T - t - T - S.}$$

Sie erfüllt demnach die Oktav-Formel $\mathbf{O = 3T \oplus 2t \oplus 2S},$ und diese Vorzahlen (3, 2, 2) sind – mathematisch formuliert – in diesen Variablen T, t und S eindeutig.

(10) Dieser Semiton S hat nun in den beiden Ganztönen jeweils einen komplementären Partner:

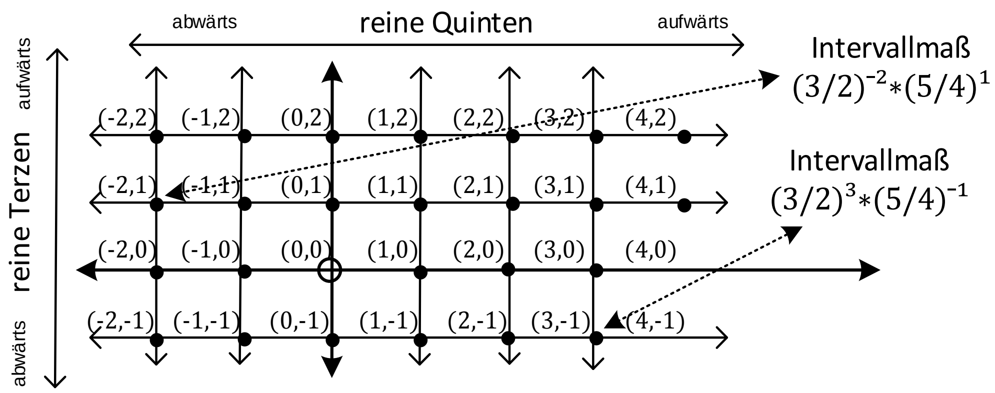
- **großes Chroma $\mathbf{CH = T \ominus S}$** (135 : 128; ~92,2 ct), komplementär im großen Ganzton,
- **kleines Chroma $\mathbf{ch = t \ominus S}$** (25 : 24, ~70,7 ct), komplementär im kleinen Ganzton.

Wir werden jetzt sehen, dass diese beiden Semitonia – aber noch andere – beim Aufbau einer kompletten 12-stufigen Tastatur R_{12} zusammen mit dem diatonischen Halbton S in die Rolle von Stufenintervallen schlüpfen. Allerdings ist dieser Prozess auf verschiedenen Wegen möglich – man kennt viele und teils sehr unterschiedliche Skalen (Euler, Kepler, Pareia…). Und es kann vorkommen, dass sie sogar aus **5 (!) unterschiedlichen Semitonia** stufig aufgebaut sind (!) Die Methode, solche Skalen zu gewinnen, besteht – im Prinzip ausschließlich – in einem Wege-Verlaufsplan im legendären Tongitter $\mathfrak{Eg}^*$ von Leonhard Euler (1707-1783), dessen Struktur wir zunächst verbal beschreiben:

In einem ebenen Achsenkreuz sei im Ursprung ein Ausgangston (Tonika) mit fester Frequenz, den man allgemein als „C“ wählt. Ein ganzzahliger Gitterpunkt (m, n) steht dann (simultan)

- *für das Intervall* $(mQ) \oplus (nTerz)$*, welches noch stillschweigend mittels passender Oktavierung in die Grundoktave* $[Tonika, Tonika \oplus Oktave[$ *reoktaviert wird,*
- *für die Iterationsvorschrift: Adjungiere m Quinten und n Terzen und reoktaviere,*
- *für den Ton, welcher sich nach Adjungieren von m Quinten und n Terzen (und den nötigen Oktaven) auf die Tonika C angewendet ergibt.*

Im Gitter $\mathfrak{Eg}^*$ *verlaufen dann von einem beliebigen Gitterpunkt ausgehend alle (3 : 2)-Quint-Iterationen horizontal und alle (5 : 4) Terz-Iterationen vertikal.*



Eulergitter $\mathfrak{Eg}^*$ aller reoktavierten Quint-Terz-Iterationen

Jedem Gitterpunkt entspricht ein musikalisches Intervall, und das **wirklich wichtigste** hierüber ist in aller erster Linie die Anwendung des 4-Töne-Satzes und die Eindeutigkeit dieses Gitternetzes:

> **Theorem (Eulergitterregel):** *„Die Punktepaare zweier gleichgroßer Differenz-Intervalle liegen auf zwei parallelverschobenen Strecken des Gitters* $\mathfrak{Eg}^*$*. Umgekehrt sind die Differenz-Intervalle sich entsprechender Punkte zweier parallel verschobener Strecken entweder gleichgroß oder sie unterscheiden sich um eine Oktave".*
>
> - *Die Addition von Vektoren des Gitters entspricht 1-1 der Addition musikalischer Intervalle. Das Intervall des Abstands 2er Gitterpunkte ist die Differenz entsprechender Iterationen.*
>
> *Dagegen sind alle Intervalle zwischen einem* ***festen*** *Punkt zu allen übrigen Punkten paarweise verschieden! Alle Töne* (n, m) *im Eulergitter sind untereinander verschieden!*

Diese Verschiedenartigkeit der Töne lässt auch eine Benennung nach „Ton-Namen" im Gitter nur sehr eingeschränkt und problembehaftet zu. Betrachten wir ein Beispiel:

Der Gitterpunkt (4, 0) ist der Ton E, der mit der Tonika C die pythagoreische Terz $4Q \ominus 2O$ *bildet und zu C das Frequenzmaß 81 : 64 besitzt – während der Punkt (0, 1) mit der Tonika die Terz 5 : 4 ≡ 80 : 64 bildet; der Unterschied ist das* ***syntonische Komma*** *(81 : 80, 21,5 ct), und dies ist genau das Differenz-Intervall*

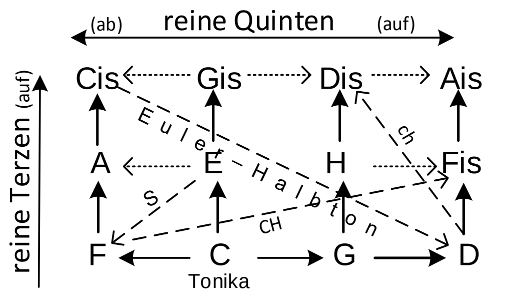
$$(4, 0) - (0, 1) = (4, -1) \equiv 4\mathrm{Q} \ominus \mathrm{Terz} \ominus 2\mathrm{Oktave}.$$

Und so geht es allen anderen parallel hierzu verschobenen Punktepaaren wie „D" = (2,0) und „D" = (-2,1) oder „Fis" = (2,1) und „Fis" = (-2,2).

Die Konstruktion **aller** reinen – heptatonischen, chromatischen wie auch vielstufigen– Skalen wird durch „geeignete" Wege in diesem Gitter gewonnen – allerdings beachte man:

„Unterschiedliche Wege ↔ unterschiedliche Skalen".

Wir stellen nun zunächst die Konstruktion der Skala R_{12} nach Euler vor, weil wir dadurch auf einen Streich gleich alle klassischen signifikanten Semitonia der reinen Chromatik gewinnen. Daneben werden wir auch noch einen Eindruck vermitteln, zu welchen Ergebnissen einige konkurrierende Skalenbildungen geführt haben. Dabei entwickelt sich demjenigen, der sich mit den Möglichkeiten der vektoriellen Skalengeometrie am Eulergitter vertraut gemacht hat, eine ganz neuartige Sicht auf den Reichtum des Temperierungswesens. **Diese Sicht ergibt sich aber genau deshalb, weil es die geometrische Art und Weise ist**, welche die Skalen sowohl **entstehen lässt** als auch simultan dank der „Eulergitter-Regeln“ deren **Berechnung gestattet** – ohne eigentlich rechnen zu müssen.



Konstruktionsprinzip der R_{12} - Skala von Euler

Ausgehend von der Tonika werden die Intervalle/Töne der Pfeilfolgen gebildet:

nicht durchbrochen ≡ *„konstruiert“*
gepunktet ≡ *„sich daraus ergebend“*
gestrichelt ≡ „entstandene Semitonia“

Diese R_{12} – Skala hat 4 unterschiedliche Semitonia

- 6 mal den reinen Halbton (S),
- 3 mal das kleine Chroma (CH),
- 2 mal das große Chroma (ch),
- 1 mal den Eulerschen Halbton (E),

und deren Stufen-Abfolge ist in der nebenstehenden Skizze zusammengestellt.

c	cis	d	es	e	f	fis	g	gis	a	b	h	c'
ch	E	ch	S	S	CH	S	ch	S	CH	S	S	

Semitonstruktur der R_{12} - Skala von Euler

Wir berechnen die Daten dieser Skala sowohl den Schritten der Iteration folgend wie auch anhand der Punkte des Eulergitters; in jedem Fall erhält man die universelle charakterisierende Zusammenstellung – die Maße (Cent- und/oder Frequenzmaß)) der Euler - R_{12}.

C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis	A	Ais	H	C'
9/8			10/9		16/15	9/8		9/10		9/8		16/15
25/24	27/25	25/24	16/15	16/15	135/128	16/15	25/24	16/15	135/128	16/15	16/15	
0	71	204	274	386	498	590	702	773	884	976,5	1088	(1200)
71	133	71	112	112	92	112	71	112	92	112	112	
1	25/24	9/8	75/64	5/4	4/3	45/32	3/2	25/16	5/3	225/128	15/8	(2)

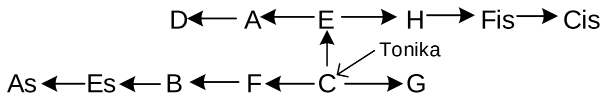
Daten der R_{12} - Skala von Euler

So oder ähnlich kann man alle Skalen, die man durch Terz-Quint-Iterationen am Euler-Gitter gewinnt beschreiben; dabei ist die Angabe der **Proportionen** für das theoretische Verständnis gut, während die metrischen **Cent-Angaben** die Distanz-Vorstellung stützen und eine **Realisierung** ermöglicht.

Wir wollen noch kurz den Blick auf zwei konkurrierende Skalen werfen, um zu erkennen, dass andere Gestaltungsmöglichkeiten auch zu anderen Stufungen führen – woraus verständlich wird, weshalb es in der Blütezeit der Temperierungen (sagen wir getrost dazu im „Bach-Zeitalter“) spannende Kontroversen im Kampf um die “einzig richtig“ geglaubte Verteilung der Semitonia zu erleben gab.

Die Skala von **Ramos de Pareia** (1440 -1491) hat die 3 leitereigenen Semitonia:

- 5 mal den diatonischen Halbton (S),
- 5 mal das große Chroma (CH),
- 2 mal das Limma (L),



Konstruktionsprinzip der R_{12} Skala von Ramos de Pareja

c	cis	d	es	e	f	fis	g	gis	a	b	h	c'
CH	L	S	CH	S	CH	S	L	CH	S	CH	S	

Semiton-Ablauf der chromatischen R_{12} -Skala von Ramos de Pareja

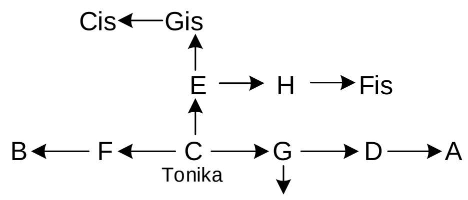
und sie hat dabei diese Abfolge der Semitonia mit der Bilanz-Gleichung

$5S \oplus 5CH \oplus 2L = 0.$

Diese Skala eines “Anonymus” (1490) wiederum kennt gleich 5 Halbtöne:

- 4 mal diatonischer Halbton (S),
- 3 mal kleines / 2 mal großes Chroma (ch / CH),
- 2 mal den Eulerschen Halbton (E),
- 1 mal das pythagoreische Limma (L),

mit der Bilanz $4S \oplus 2CH \oplus 3ch \oplus 2E \oplus L = 0$.



Konstruktionsprinzip bei Anonymus

c	cis	d	es	e	f	fis	g	gis	a	b	h	c'
ch	E	S	ch	S	CH	S	ch	E	L	CH	S	

Semiton-Struktur der R_{12} - Skala von Anonymus

Sie hat einen so komplexen semitonalen Stufen-Ablauf, **dass jede Tonart anders gestuft ist: Eine perfekte Tonarten-Charakteristik!**

Mit etwas Übung des vektoriell-geometrischen Berechnens der Distanzen im Eulergitter können diese Bilanzen blitzschnell – und ohne Zahlensalat – dank der Eulergitterregeln erstellt werden.

Die Frage: ***Was sind nun eigentlich die Semitonia?*** hat **keine** einfache Antwort: Es gibt – je nach Wege-Wahl – unendlich viele Möglichkeiten, 12-stufige Skalen aus Quinten und Terzen zu generieren. Tröstlich zu wissen ist aber, dass die Mathematik zeigen kann, dass

- alle Intervalle des Gitters $\mathfrak{Eg}^*$ und seiner Intervallalgebra $\mathfrak{M}_{\text{rein}}$– erst recht alle Mikro-Intervalle – nicht nur durch die Oktav-Quint-Terz-Daten (den **„Euler-Daten“** O-Q-T) – sondern beispielsweise auch durch die **chromatische Basis** bestehend aus diatonischem Halbton und den beiden Chroma (S-CH-ch) oder durch die **heptatonische Basis** (T, t , S) u.v.m. beschrieben werden können.

Genau dies führt zu einer Fülle von Gleichungen, die von manchen Autoren und Musiktheoretikern

Die harmonischen Gleichungen

genannt werden. Dass wir es hierbei mit einer beinahe nicht mehr überschaubaren und merkbaren Fülle von Beziehungen zu tun haben, wird schnell klar. Hierbei helfen weder eine numerisch orientierte Zusammenstellung aller signifikanten Intervalltypen noch eine ohne Systematik geleitete Formel-Zusammenstellung von alldem. Wir empfehlen daher den Gebrauch des Eulergitters, an dem wir dank seiner vektoriellen Geometrie die Pfade der Intervallgenerierung numerisch und theoretisch äußerst effizient verfolgen können.

Gottlob beschränkt man sich ja für gewöhnlich auf überschaubare und ursprungsnahe Wege im Tongitter; die dort vorkommenden Intervalle, welche als Stufen in 12-stufigen Skalen vorkommen – und die vielleicht deswegen **„Halbtöne“** heißen mögen, sind die, denen wir bereits begegnet sind. Ihre gebräuchlichsten Definitionen sowie ihre Maße zeigt die folgende Tabelle:

Die klassischen Semitonia des Reinen Terz-Quint-Intervall-Systems					
Symbol	**Bezeichnung**	**Definition**	**Euler-Daten**	**Maße (ct gerundet)**	
$\mathbf{L}$	Limma	$\mathbf{Q \ominus 3T}$	$\mathbf{3O \ominus 5Q}$	256 / 243	90,2 ct
$\mathbf{A}$	Apotome	$\mathbf{T \ominus L}$	$\mathbf{7Q \ominus 4O}$	2187/2048	113,7 ct
$\mathbf{S}$	diaton. Halbton	$\mathbf{Q \ominus Terz \ominus T}$	$\mathbf{(O \ominus Q) \ominus Terz}$	16/15	111,7 ct
$\mathbf{ch}$	kleines Chroma	$\mathbf{t \ominus S}$	$\mathbf{2Terz \ominus Q}$	25/24	70,5 ct
$\mathbf{CH}$	großes Chroma	$\mathbf{T \ominus S}$	$\mathbf{3Q \oplus Terz \ominus 2O}$	135/128	92,2 ct
$\mathbf{E}$	Euler-Halbton	$\mathbf{T \ominus ch}$	$\mathbf{(3Q \ominus 2Terz) \ominus O}$	27/25	133,2 ct

Schließlich stellt sich uns auch ganz zwangsläufig die Frage nach den **Kommata: *Was ist ein Komma?*** Hier bieten sich denn auch mehrere Möglichkeiten an, wie zuvorderst die Interpretationen als

a) **Differenz von Halbtönen**, wie z.B.: pythagoreisches Komma = Apotome minus Limma),
b) **Schließungsdefizite**, wie z.B.: Quinten zu Terzen , Quinten zu Oktaven, Terzen zu Oktaven.

So ist ja bereits das **pythagoreische Komma ein Beispiel par excelence** für die Verbindung beider Anschauungen – siehe den „Satz vom Quinten-Komma" in Abschnitt 2. Wir begegnen in der Literatur manchen Mischformen – sogar die Differenz von Kommata ist ein „Komma" - wie das berühmte „kleinste Intervall der Antike", das Schisma,

Schisma *= Pythagoreisches Komma ⊖ syntonisches Komma* ($5 * 3^8 : 2^{15} = \frac{32805}{32768}$ ≈ 2 ct)

zeigt. Die abschließende Tabelle führt jedenfalls die in der klassischen Literatur der Temperierungstheorie allgegenwärtigen Kommata auf. Schauen Sie, hier gelingt uns nun eine neue und einheitliche, einprägsame Interpretation der Kommata als **semitoniale Differenzen** (a):

Die klassischen Kommata des Reinen Terz-Quint-Intervall-Systems			
Bezeichnung	**Definition nach a)**	**Euler-Gitter-Daten**	**Maße (≈ct)**
pythagoreisches Komma	$\mathrm{A \ominus L}$	$\mathrm{12Q \ominus 7O}$	23,5 ct
syntonisches Komma	$\mathrm{CH \ominus ch}$	$\mathrm{4Q \ominus (Terz \oplus 2O)}$	21,5 ct
Diaschisma	$\mathrm{S \ominus CH}$	$\mathrm{3O \ominus (4Q \oplus 2Terz}$	19,5 ct
kleine Diësis	$\mathrm{S \ominus ch}$	$\mathrm{O \ominus 3Terz}$	41 ct
große Diësis	$\mathrm{E \ominus ch}$	$\mathrm{4(Q \ominus Terz) \ominus O}$	62,5 ct
Schisma	pythagoreisches Komma ⊖ syntonisches Komma	$\mathrm{8Q \oplus Terz \ominus 5O}$	2 ct

Und wenn wir uns intensiver mit diesen beiden Tabellen befassen, so finden wir eine überbordende Fülle an Zusammenhängen – **„Harmonische Gleichungen"** wie zum Beispiel diese:

$$2 \text{ pythagoreisches Komma} \ominus 3 \text{ Schisma} = 1 \text{ kleine Diësis}$$

$$4 \text{ kleine Diësis} \oplus 1 \text{ pythagoreeisches Komma} = 3 \text{ große Diësis}$$

$$2 \text{ syntonisches Komma} \ominus 1 \text{ pythagoreeisches Komma} = 1 \text{ Diaschisma}$$

……….

– aber diese finden wir auf logisch-algebraischer Ebene und bar mühsamer Maßzahl-Bestimmungen – welche ja (der Rundungen wegen) sogar eher zufällig oder nur „beinahe genau" sein könnten.

4 Lauten-Mathematik und die Gleichstufigkeit

> *„ Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald etwas anderes“ (Johann Wolfgang von Goethe)*

Gleichstufigkeit im 12-stufigen Tonsystem – das ist die Stimmung, in welcher alle Halbtonschritte H_o gleichgroß sind – nämlich haargenau 100 ct oder $|H_o| = q = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}0594$ ... Die Oktave strukturiert sich in der simplen Bilanz $O = 12\ H_o$; der Kreis mit 12 Quinten Q_o (Q_o=$7H_o$, $ct(Q_o) = 700$ ct) schließt sich perfekt; es gibt weder ein Komma noch eine Tonarten-Charakteristik. Alles wird durch den nicht-rationalen **Gleichstufigkeits-Parameter q** bestimmt.

„Langweilig“ sagen die einen – ***„ein Segen“*** die anderen; der Streit um dieses Thema füllt Bände – zeigt aber auch, wie bedeutsam der semitonale Reichtum einst war – eine andere Geschichte.

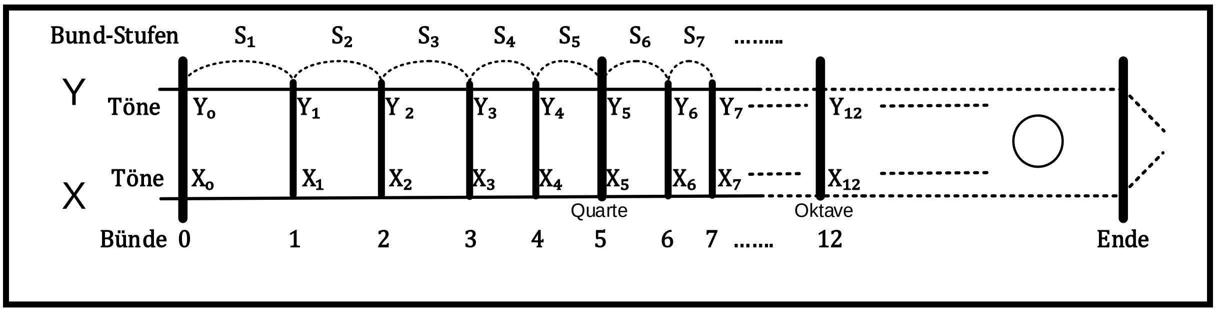
Wir werden in diesem Kapitel nun zeigen, dass gewisse Instrumente jedoch unter wenigen nötigen und plausiblen Voraussetzungen der **gleichstufigen Temperatur** bedürfen. Dies betrifft alle Instrumente,

- welche das diskrete 12-stufige Skalen-Raster mit hinreichend vielen Halbton-Stufen besitzen
- bei denen sich der Stufencharakter auf parallel geshiftete Tongebungen überträgt – wobei einige triviale Symmetrien auszuschließen sind.

Wie das gemeint ist sehen wir in Kürze. Konkret betrachten wir Lauten, Gitarren und ihre Familie, deren Halbtonstufen durch „Bünde“ auf die gespannten Saiten übertragen werden.

Zur Schilderung prinzipieller Fakten ist es ausreichend, dass wir das Modell einer 2-saitigen Laute **(Duochord**) wählen. Es bestehe aus 2 gespannten Saiten X (tiefer klingend) und Y (höher klingend) mit gleichlangen freien Schwinglängen. Eine parallele Bundfolge definiere die aufsteigenden konkreten Tonfolgen X_o, Y_o (leere Saiten, „Grundtöne“), X_1,Y_1, X_2,Y_2 ... usw.. Ab dem 12. Bund (der Oktave zu den Grundtönen) soll sich die Intervall-Stufenfolge – sofern die Bundfolge soweit reicht - auch wiederholen; sie ist gedanklich 12-periodisch. Das hat zur Folge, dass die Summe von 12 aufeinander folgenden Halbton-Stufen stets eine Oktave bildet, ganz gleich, wo man beginnt – sofern es noch reale definierende Bünde gibt.

Nach den Jahrtausende alten Rechnungen am Monochord wissen wir, dass unabhängig davon, welche Grundtöne X_0, Y_0 die Saiten X und Y haben, alle parallel gegriffenen Intervalle an den Bünden $[X_1, Y_1]$, $[X_2, Y_2]$... gleich groß und identisch mit dem Intervall $[X_0, Y_0]$ der leeren Saiten sind. Denn die Intervalle $[X_0, X_n]$ und $[Y_0, Y_n]$ sind nach diesen Monochord-Regeln beide identisch, da ihr Maß gleich dem Längen-Verhältnis: leere Saite zu restlicher Saite ist; der Rest besorgt der 4-Töne-Satz. Aus dem gleichen Grund sind für jedes n=0,1,2... die beiden Stufenintervalle $[X_{n-1}, X_n]$ und $[Y_{n-1}, Y_n]$ gleich – also von der Tonhöhe der gespannten Saiten völlig unabhängig. Wir nennen diese Intervalle $[X_{n-1}, X_n]$ **Bund-Stufen (S_n).** Die Bund-Stufenfolge $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ ist daher 12-periodisch: Nach jeweils 12 Bund-Schritten entstehen wieder die gleichen Schritte.



Nun formulieren wir eine Bedingung an das Instrument, welche letztlich der Forderung nach der Reinheit von Oktaven und Primen geschuldet ist und sinnvollen wie auch plausiblen musikalischen Erfordernissen entspricht: Es handelt sich um die

Konsistenzbedingung: Alle Töne des Instruments gehören einem Tonsystem an, welches aus einer einzigen, eindeutigen 12-stufigen Oktavskala (periodisch fortgesetzt) aufgebaut ist. Mindestens eine Skala wird am Instrument realisiert.

Das bedeutet insbesondere, dass es von einem beliebigen Ton aus nur eine einzige semitonale 12-stufige Skala bis zu seiner Oktave gibt – ganz gleich, auf welche Saiten hierzu gespielt wird.

Nun ergibt sich unter dieser Bedingung ein höchst interessantes Spiel in der Geometrie der Bund-Stufen – wozu wir aber nicht ganz ohne Mathematik auskommen: Und dazu dient das

- **Lauten-Lemma:** *Die Konsistenzbedingung hat für unser Lauten-Modell folgende Konsequenzen:*

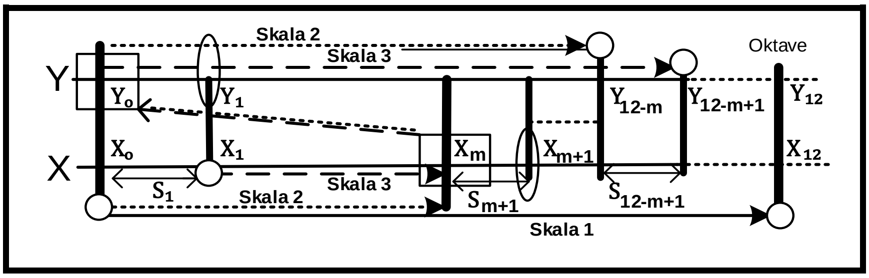
Es gibt einen bestimmten Ton (X_m) der (tieferen) X-Saite, der mit dem Grundton (Y_0) der (höheren) Y-Saite übereinstimmt – mehr noch: alle Folgetöne der Y-Saite ab dem Bund 0 sind die gleichen wie die Folgetöne der X-Saite ab dem Bund m. Dieser Parameter (m) – wir können ihn zwischen 0 und 12 annehmen – heißt ***Saiten-Stufen-Parameter*** *(der Saite Y zur Grundsaite X).*

Durch diese Verheftung an den beiden identischen Verbindungstönen $\mathrm{X_m}$ und $\mathrm{Y_0}$ (oder ihren geshifteten Folgetönen) sind beide Saiten wechelseitige bruchfreie Fortsetzungen der jeweils anderen. Dank dieser Eigenschaft wird uns klar, dass unser Bund-Stufen-System **periodisch mit der Periode m** ist: Nach jeweils m Stufenschritten wiederholt sich die Stufenabfolge. Aber es gilt noch mehr: Die Abfolge der Bund-Stufen ist überraschenderweise auch noch **(12 – m)-periodisch.**

Wenn diese Bund-Stufen-Folge aber simultan 12-, m- und (12 – m)-periodisch ist, so ist sie bereits periodisch mit der Periodenlänge des größten gemeinsamen Teilers (ggT) dieser drei Zahlen 12, m und (12 – m) und das ist der ggT von 12 und m. In den allermeisten Fällen der Praxis ist der ggT die Zahl 1: Alle Bund-Stufen sind gleich – ***die Stufenfolge ist gleichstufig!***

Ist beispielsweise die Y-Saite eine Quarte über der X-Saite (m=5), so ist der ggT = 1: Gleichstufigkeit.

Wie kommt es zu diesen Symmetrien? Zunächst ist klar, dass der Grundton $\mathrm{Y_0}$ einer der Töne der X-Saite sein muss, so verlangt es die Konsistenzbedingung. Das gleiche gilt auch für die anderen Töne dieser Saite, zumindest wenn sie im Bundsystem durch Töne der X-Saite noch erfasst werden. Warum aber nun Schritt für Schritt die Abläufe m- und (12 – m)-periodisch geordnet sind – das erkennen wir durch folgende trickreiche Argumentation: Stellen wir uns vor, wir bilden auf dem Grundton $\mathrm{X_0}$ der X-Saite eine chromatische Oktav-Skala, so können wir das auf zweierlei Weise tun:



Von X_0 auf der X-Saite bis X_{12} (Skala 1) oder von X_0 auf der X-Saite nur bis zum Ton X_m, der ja identisch mit Y_0 ist, wechseln zur Y-Saite und dort von Y_1 bis zum Ton Y_{12-m} (Skala 2).

Beide Male haben wir eine 12-stufige chromatische Skala auf ein und demselben Ton ($\mathrm{X_0}$) errichtet. Dann sagt aber die Konsistenzbedingung, dass die Skalen identisch sind. Speziell sind also auch die direkten Folgetöne $\mathrm{Y_1}$ und $\mathrm{X_{1+m}}$ der Verbindungstöne identisch – und gleiches gilt für alle weiteren Töne. Das bedeutet also, dass die erste Bund-Stufe gleich der $(\mathrm{m}+1)^{\mathrm{ten}}$ Bund-Stufe ist – in Formeln

$S_1 = [X_0, X_1]) = [Y_0, Y_1] = [X_m, X_{m+1}] = S_{m+1}$.

Und obwohl wir hieraus auch relativ schnell zum periodischen Ablauf der Bund-Stufenfolge kämen, so will ich dennoch ein methodisches Argument vorstellen – sozusagen die **musikalische Variante** des bekannten **mathematischen Prinzips** der schrittweisen Begründung, nämlich das

- **Capodaster-Argument**: Legen wir auf den 1- Bund einen **Klemmbügel** (den „Capodaster“), so verkürzen wir die Laute – beobachten aber, dass die neue Y-Saite ebenfalls den Saiten-Stufen-Parameter m hat, weil ja der neue Grundton (Y_1) der neuen Y-Saite identisch mit dem Ton X_{m+1} am neuen m^{ten} Bund der neuen X-Saite ist. Das haben wir ja soeben gezeigt. Und jetzt können wir wieder wie zuvor schließen: Die (neue) 1^{te} Bund-Stufe (S_2) ist gleich der (neuen) $(m+1)^{ten}$ Bund-Stufe (S_{m+2}). Auf diesem iterativen Wege finden wir dann das m-Perioden-Gesetz

$S_k = S_{m+k}$ für alle Stufen $k = 1, 2, 3, \ldots$ usw.

Und wie sehen wir die zu 12 komplementäre (12 – m)-Periodizität? Dazu betrachten wir neben der Skala 2 noch die Skala 3, welche von X_1 über $X_m = Y_0$ bis $Y_{(12-m)+1}$ verläuft. Dann ist die gesamte Distanz von X_0 bis $Y_{(12-m)+1}$ 13 Stufen lang, und somit eine kleine None (N), und beide Oktavskalen sind hierin – versetzt – enthalten. Jetzt kommt der Trick: Subtrahieren wir von dieser None die obere Oktave $[X_1, Y_{(12-m)+1}]$, so bleibt $[X_0, X_1] = S_1$ übrig; subtrahieren wir dagegen die untere Oktave $[X_0, Y_{(12-m)}]$, so bleibt $[Y_{12-m}, Y_{(12-1)+1}] = S_{(12-m)+1}$ übrig. Also ist $S_1 = S_{(12-m)+1}$. Dann wenden wir wieder das ***Capodaster-Argument*** an und kommen hierüber ebenfalls zur Periodengleichung

$S_k = S_{(12-m)+k}$ für alle Stufen k = 1, 2, 3, …usw.

Selbstredend ist diese Gleichung nur real, solange Bünde verfügbar sind – bei 12 Bünden und meist teilerfremden Saiten-Stufen-Parametern führt es jedoch zu den genannten Stufensymmetrien.

Ein Beispiel: Wir nehmen den (in der Praxis realisierten) Fall an, dass die Y-Saite 2 Quarten über der Grundsaite X steht. Dann ist m = 10 und (12 – m) = 2, so dass unsere Bund-Stufen-Folge sogar 2-periodisch ist. Die Gitarrenskala ist also in der regelmäßigen Bund-Stufen-Abfolge $A - B - A - B$ …. aufgebaut, sie ist simultan 2-, 10- und 12-periodisch, und alle (12) Ganztonschritte haben den Aufbau $T = A \oplus B$ oder $T = B \oplus A$ und sind folglich gleichgroß. Daher ist unsere Skala zumindest schon mal ganztönig–gleichstufig aufgebaut; die Oktave besteht aus 6 gleichstufigen Ganztönen T, die deshalb genau 200 ct oder das Frequenzmaß $|T|=\sqrt[6]{2}$ besitzen. Allerdings könnten die Semitonia A und B völlig unterschiedlich sein – lediglich der Summenwert $ct(A) + ct(B) = 200$ ct muss stimmen.

Jetzt bleibt nur noch die Überlegung, wann auch noch $A = B$ wäre. Dazu nehmen wir jetzt an, dass noch eine weitere Saite Y da ist und dass sie als Quarte (5 Stufen) über der Saite X gestimmt sei. Dann ist $Y_0 = X_5$, und nach dem Lauten-Lemma ist die Stufenfolge 5-periodisch: Der 6. Schritt (das wäre B) ist wieder wie der erste (das ist A) – also $A = B$, und wir haben die Gleichstufigkeit erreicht!

So, das wäre geschafft, ein wenig Mathematik hat`s doch gebraucht. Bevor wir aber die Früchte im anschließenden „Lauten-Theorem“ einfahren, müssen wir noch einige Sonderfälle behandeln.

Hat die Laute zum Beispiel 4 Saiten im Abstand kleiner Terzen (Saiten-Stufen-Parameter 3, 6, 9), so ist für jede beliebige Wahl der 3 Bund-Stufen A, B, C, für welche lediglich der Summenwert ct$(A \oplus B \oplus C) = 300$ ct (eine gleichstufige kleine Terz) erfüllt sein muss, die Skala

$(A–B–C) – (A–B–C) – (A–B–C) – (A–B–C)$

zwar in 4 gleichgroßen kleinen Terzen aufgebaut, innerhalb dieser Blocks – und damit insgesamt – aber nicht gleichstufig. Gleichwohl ist diese 3-periodische Skala mit der Konsistenzbedingung verträglich und widerspruchsfrei spielbar. Andere Konstellationen – wie 3 Blocks gleichgroßer Groß-Terzen zu je 4 Stufen A – B – C – D der Gesamt-Centzahl 400 ct sind ebenso widerspruchsfrei möglich.

Theorem (Lauten-Theorem): Gegeben sei eine Laute mit den in aufsteigender Anordnung aufgezählten $(n+1)$ Saiten X, Y^1, $Y^2, \dots, Y^n$, wobei die instrumentalen Voraussetzungen analog zu denen des obigen Modell-Duochords seien. Es gelte nun die zuvor beschriebene

- Konsistenzbedingung (keine Enharmonik, Reinheit von Prim und Oktav, hinreichende Vollständigkeit des Bundsystems).

Dann ist der Grundton Y_0^k jeder Saite Y^k mit einem gewissen Stufenton der Vor-Saite Y^{k-1} identisch. Wir können ebenso auch sagen, dass jeder Grundton einer Saite Y^k mit irgend einem Stufenton X_{m_k} der Grundsaite X übereinstimmt, in Formeln $Y_0^k = X_{m_k}$. Das von Hause aus 12-periodische Semiton-Stufenmuster $S_1,\dots,S_{12}$ ist dann sowohl m_k - als auch $(12 - m_k)$-periodisch. Dies gilt also für jeden dieser n Saiten-Stufen-Parameter $m_1,\dots, m_n$ (der Y^k-Saiten zur X-Saite).

- Die Periodizität der Bund-Stufenabfolge $S_1,\dots, S_{12}$ ist folglich der ggT der $(n+1)$ Zahlen $(m_1,\dots, m_n, 12)$, und dieser ist nur in Symmetrie-Ausnahmen nicht $=1$; und „1“ bedeutet, dass die Laute gleichstufig gestimmt sein muss, soll die Konsistenzbedingung erfüllt sein.

Ein widerspruchfreies Instrument ist also zwingend **gleichstufig temperiert**, falls beispielsweise

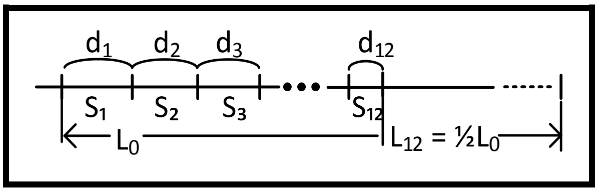
- (sogar nur) zwei Saiten im Quart-Abstand stehen,
- oder zwei Saitenpaare im Groß- und Kleinterz-Abstand zueinander stehen….

Es mag sein, dass diese Erkenntnis den Hintergrund dazu bildete, dass schon seit jeher das Bestreben bestand, Lauten und Gitarren so zu konstruieren, dass eine möglichst zufriedenstellende Gleichstufigkeit entsteht. Dazu müssen die Bünde einem ganz bestimmten Proportionengesetz genügen: Wir können aus dem Monochord Gesetz der reziproken Abhängigkeit der Frequenz von der Länge der frei schwingenden Saite zur Gesamtlänge das in der Musiktheorie wichtige Exponentialgesetz herleiten, dass nämlich die Bundfolgenbreiten d_k die schrittweisen Änderungen

$$d_2 = d_1\,(\sqrt[12]{2})^{-1},\; d_3 = d_2\,(\sqrt[12]{2})^{-1}, \dots, d_{k+1} = d_k\,(\sqrt[12]{2})^{-1} \quad (k = 1, 2, 3,\dots)$$

untereinander haben, und diese „rekursiven“ Gleichungen führen uns im Nu zur Bund-Formel

$$d_k = l_0\left(\sqrt[12]{2} - 1\right) * (\sqrt[12]{2})^{-k}\,.$$



für $(k = 1, 2, 3,\dots)$. In der Tat finden wir bereits in der frühen Neuzeit eine interessante Palette an konstruktiven Ideen, diese **Exponentialfolge des Gleichstufigkeits-Parameters** $q = \sqrt[12]{2}$ zu berechnen beziehungsweise geschickt in die Bund-Anordnung zu implantieren – wie wir erstaunt bei dem Schweden Daniel Stråhle sehen können (siehe [4]).

Bemerkung zu den historischen Lauten:

Schließlich wollen auch deutlich betonen, dass dieses Ergebnis hinsichtlich der Gleichstufigkeit der Prämissen bedarf. Ohne sie lassen sich natürlich völlig andersartige Instrumente finden, wie es beispielsweise im vorderen Orient der Fall ist. Hat die Laute nämlich nur **wenige** Bünde, so fällt die 12-Periodizität von vornherein weg; auch führen heptatonische Bundstufen nicht zwingend zur Gleichstufigkeit. Und bei Wegfall der Forderung, dass der Tonvorrat keine enharmonischen nicht-identischen Töne enthält, kann es ebenfalls zu anderen Instrumenten führen.

Nehmen wir als Beispiel eine 2-saitige Laute – ein Duochord - mit 3 Bünden, deren Stufung $S_1 - S_2 - S_3$ völlig frei gewählt ist, so würde eine Skala als Schichtung zweier stufig identischer Tetrachorde entstehen, wenn der Grundton Y_0 der höheren Saite höher oder gleich dem höchsten Bundton X_3 der X-Saite wäre. Und ist dann S_4 das Intervall X_3 bis Y_0, so entstünde in aufwärts gespielter Anordnung eine heptatonische Skala der Stufenfolge

$$(S_1 - S_2 - S_3) - S_4 - (S_1 - S_2 - S_3).$$

Dabei müsste dies noch nicht einmal eine Skala vom üblichen Umfang einer Oktave sein. Alle musikalischen Parameter wären frei – bis auf die zwingende Stufensymmetrie, welche durch die Parallelität des Bundsytems bedingt ist. Und „schräge“ Bünde würden selbst diese Symmetrie aufheben.

5 Epilog

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1\ !?}$$

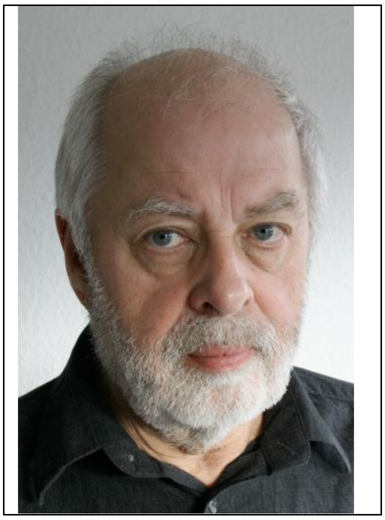
Wir hätten unser Thema sicher auch mit dieser provozierenden sybillinischen Formel überschreiben können – haben wir doch gesehen, dass aus der – quasi naturgegebenen – unsymmetrischen Teilung des Ganztons, des „Tonos“, das gesamte Gebäude der differenzierten Intervalle, der Halbtöne, der Mikrotöne, der Kommas und den Wolfsquinten aufgebaut werden kann. Und nur die Gleichstufigkeit lässt all dies verschwinden. Wer einen Blick in den Kosmos antiker Tetrachordik und deren Intervallstrukturen wirft, erfährt auf Schritt und Tritt, wie die Vorstellung der „Zahl“ und ihren Eigenschaften einer Teilbarkeit simultan die Theorie der Musik bestimmt hat.

Wenn wir als Organisten unsere Instrumente stimmen, rechnen wir gewiss nicht – aber wir befinden uns in medias res der zu Tönen gewordenen Primzahlen. Und ganz zum Schluss komme ich zur Gregorianik, der man ja häufig unreflektiert das gleichstufige Gewand angezogen hat – wohlwissend, dass sie über tausend Jahre und von Anbeginn an ihre ***Semitonia*** *anderswo wusste als die moderne Orgel – wer weiß, wie man über* ***si be-molle*** *und* ***si naturale*** *neu nachdenken sollte?!*

Literatur (Auswahl)

[1] Dupont, W.: Geschichte der musikalischen Temperatur. Orgelbau – Fachverlag Rensch, (1986)
[2] Kelletat, H.: Zur musikalischen Temperatur I und II. Merseburger, (1981, 1982)
[3] Schneider, A., von Busch, R., Adam, C.: Mitteltonstimmung und Wohltemperierung im Vergleich, Ars Organi 3/2017, p.163-172
[4] Schüffler, Kh.: Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma, Springer Spektrum (2017)

Prof. Dr. Karlheinz Schüffler *wurde 1947 in Trier geboren und wuchs in Perl an der Mosel (im SaarLorLux-Raum) auf. Obwohl er sich seit Kindheit und Jugend der Musik – insbesondere der Orgel – verbunden fühlte, studierte er Mathematik und Physik an der Universität Saarbrücken und promovierte 1978. Nach seiner Habilitation 1985 an der Universität Düsseldorf wirkte er dort bis heute als Privatdozent und lehrte von 1987 bis 2015 als Professor für Mathematik am Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik der Hochschule Niederrhein, Krefeld.*



Seit seiner Jugendzeit spielt er Klavier und Orgel, erlernte Chorleitung und praktiziert beides seit 1964. Chor- und Orgelkonzerte im In- und Ausland begleiteten das musikalische Engagement. Aktuell leitet er den Chor der Hochschule Niederrhein und die Schola Gregoriana Krefeld sowie die Kirchenmusik an der historischen, restaurierten Walcker-Orgel der Lutherkirche Krefeld.

Er ist außerdem Autor eines populär-wissenschaftlichen Buches über Musik und Mathematik: „Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma“ (Springer Spektrum 2017, 2. Aufl.). Die interessante Publikation entwickelt eine mathematische Theorie musikalischer Skalen, ihrer Intervalle, Strukturen und Begrifflichkeiten mit dem Bezug zu dem Bereich der Theorie und Methoden historischer Temperierungen